



ce  
pre  
UNI

**TEORÍA**

# Geometría

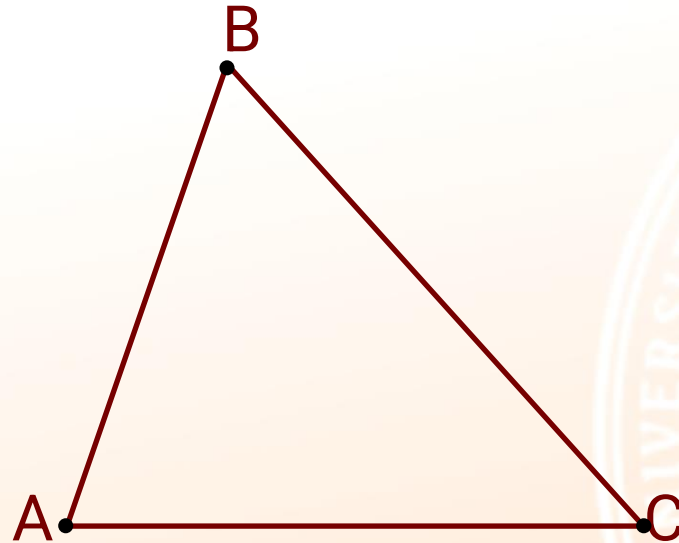
**TRIÁNGULOS, TEOREMAS  
Y LÍNEAS NOTABLES**

**CICLO  
PRE  
2024-1**



# TRIÁNGULO

**Definición.-** Si A, B y C son tres puntos no colineales, entonces la unión de los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ , se denomina triángulo.



Vértices: A, B y C

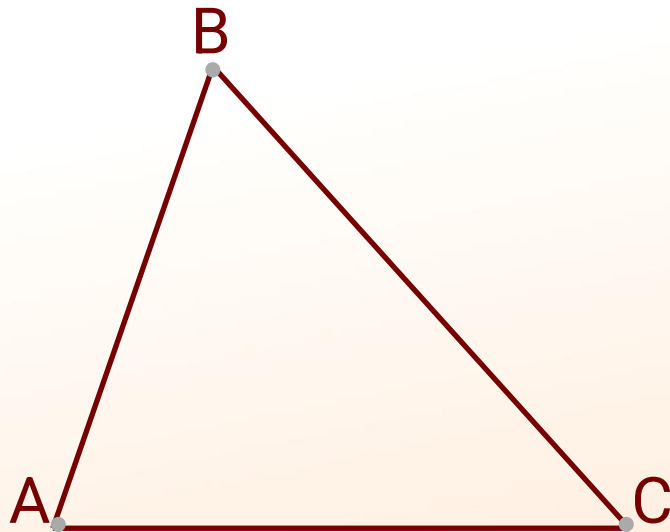
Lados:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$

**Notación:**

$\triangle ABC$ : Se lee, triángulo ABC

# ÁNGULO INTERIOR EN EL TRIÁNGULO

Un triángulo determina tres ángulos, los cuales se denominan, ángulos del triángulo o ángulos internos del triángulo.

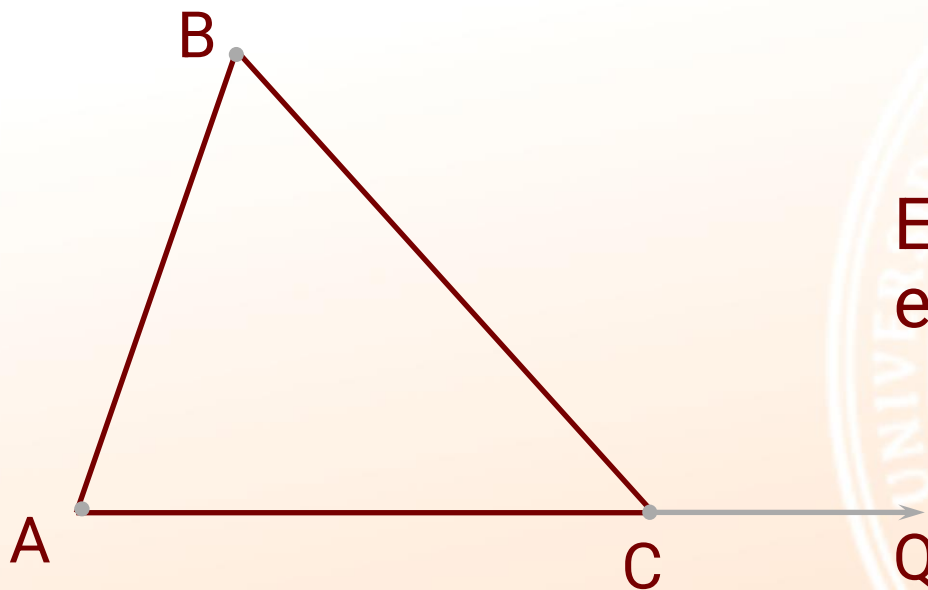


Los ángulos internos del triángulo ABC son:  
 $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$  y  $\angle BCA$

Se pueden indicar:  $\angle A$ ,  $\angle B$  y  $\angle C$

# ÁNGULO EXTERNO EN EL TRIÁNGULO

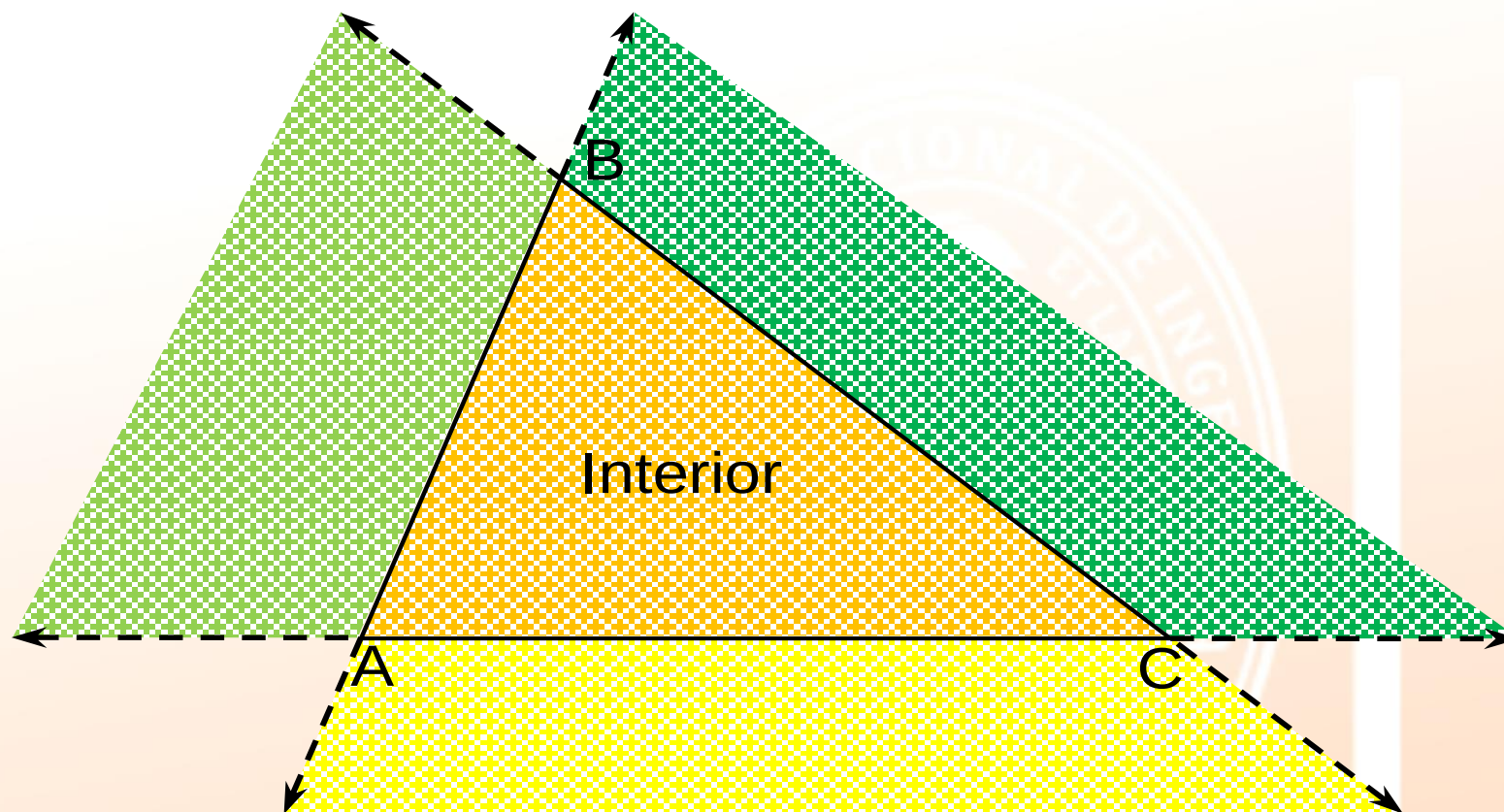
**Definición.-** Es el ángulo adyacente y suplementario de un ángulo interior del triángulo, es decir, es cada uno de los ángulos que determina un par lineal con un ángulo interno del triángulo.



En el triángulo ABC, un ángulo externo es:  $\angle BCQ$

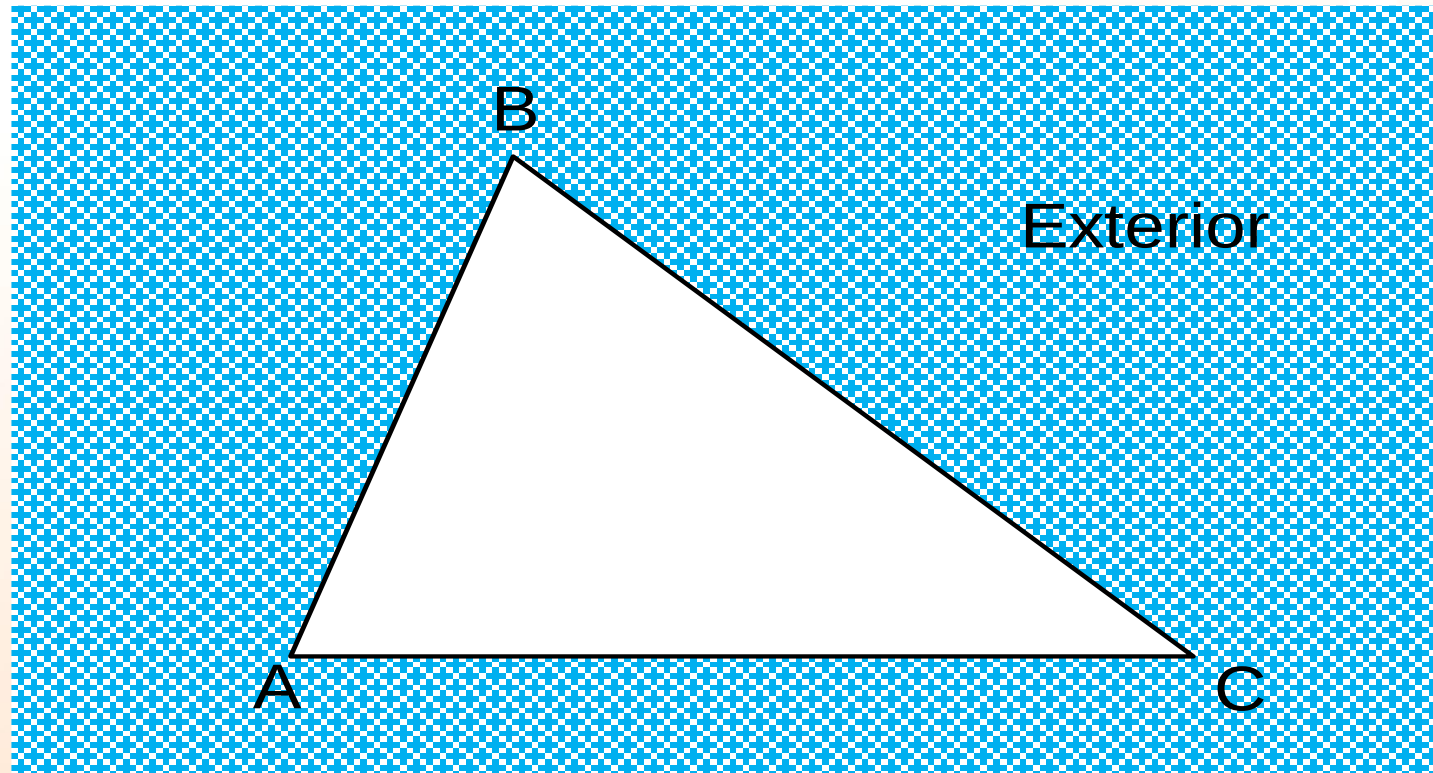
# INTERIOR DE UN TRIÁNGULO

**Definición.-** Es la intersección de los interiores de los ángulos del triángulo.



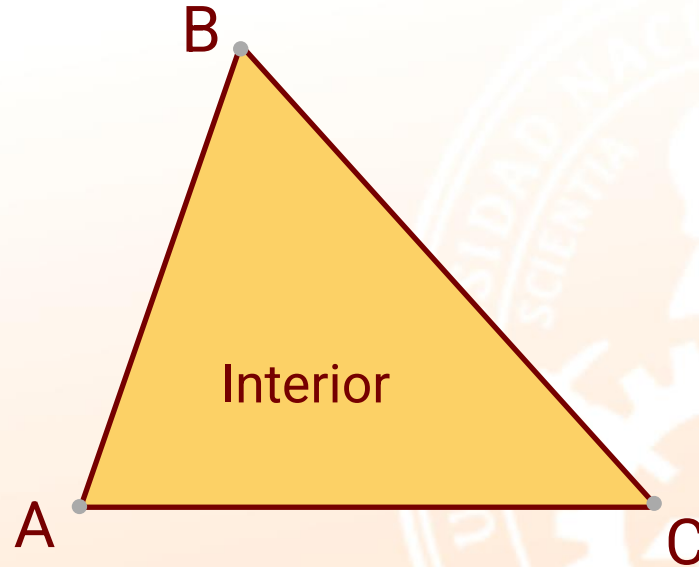
## EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO

**Definición.-** Es el conjunto de puntos, que no pertenecen al triángulo ni al interior.



## REGIÓN TRIANGULAR

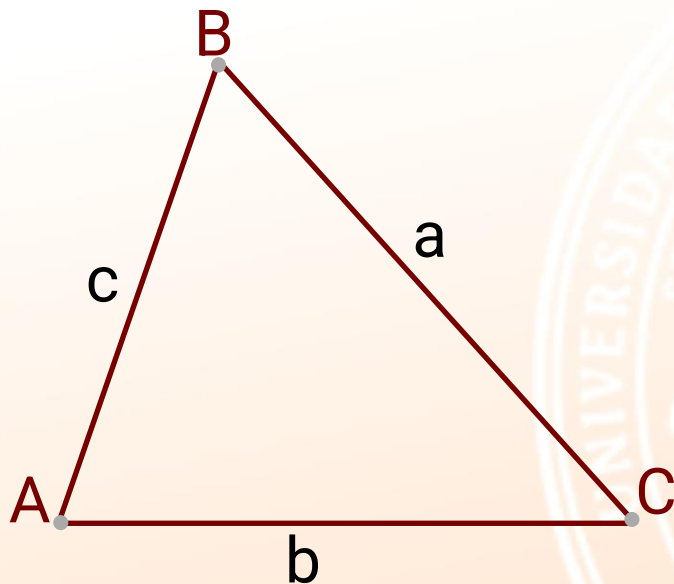
**Definición.-** La unión de un triángulo y el interior, se denomina región triangular.



$$[\text{Región Triangular}] = [\triangle ABC] \cup [\text{Interior}]$$

# PERÍMETRO DEL TRIÁNGULO

Es la suma de las longitudes de los tres lados del triángulo y se denota como  $2p$ .



En el  $\triangle ABC$

Perímetro:  $2p$

$$2p = a + b + c$$

Semiperímetro:  $p$

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

## EJERCICIO 01

Indique los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. El triángulo, es un conjunto convexo.
- II. En el triángulo, la intersección del interior y el exterior es el triángulo.
- III. El perímetro del triángulo es la suma de los lados.

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FFF

E) FVF

## RESOLUCIÓN 01

Indique los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. El triángulo, es un conjunto convexo.
- II. En un triángulo, la intersección del interior y el exterior es el triángulo.
- III. El perímetro del triángulo es la suma de los lados.

I. **FALSO.**

Por definición de conjunto convexo, el triángulo es conjunto no convexo

II. **FALSO.**

El interior y el exterior del triángulo son disjuntos, la intersección es el vacío.

III. **FALSO.**

El perímetro del triángulo, es la suma de las longitudes de los lados.

Clave: D



ce  
pre  
UNI

**TEORÍA**

# Geometría

## CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

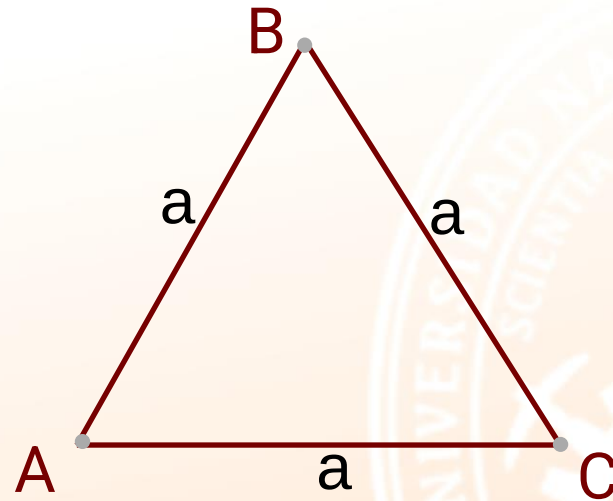
**CICLO  
PRE  
2024-1**



# SEGÚN LOS LADOS

## 1. Triángulo equilátero

Los tres lados son congruentes.

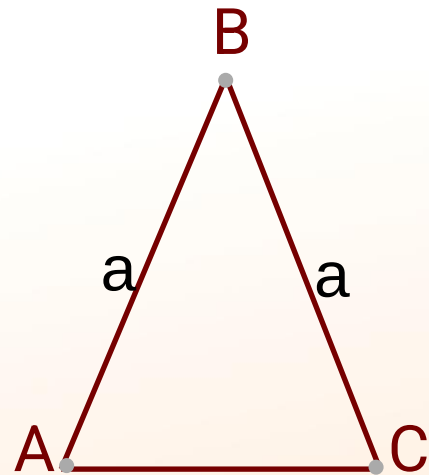


En el triángulo equilátero ABC:  $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

En el triángulo equilátero, cada ángulo mide 60

## 2. Triángulo isósceles

Tiene dos lados congruentes, el tercer lado se denomina base.

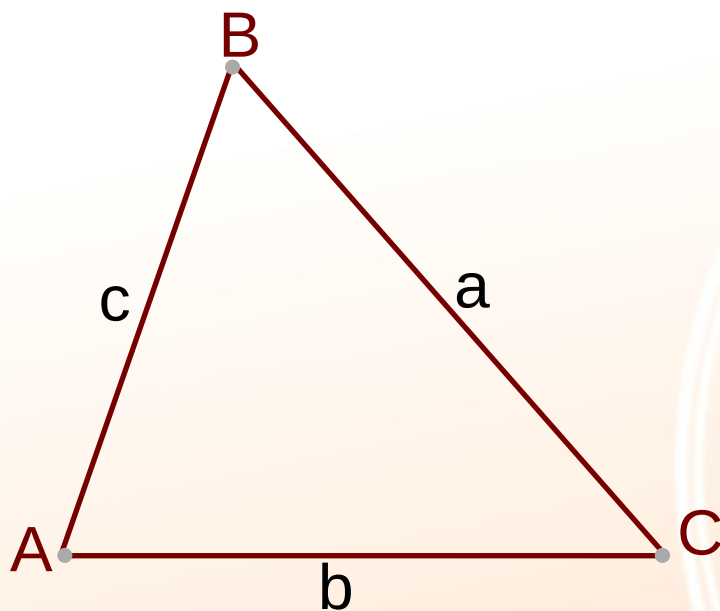


El  $\triangle ABC$ , es isósceles  $\overline{AB} \cong \overline{BC}$   
 $\overline{AC}$  es la base

Los ángulos en la base son congruentes:  $\angle A \cong \angle C$

### 3. Triángulo escaleno

No tiene lados congruentes.



El  $\triangle ABC$ , es escaleno

$$a \neq b$$

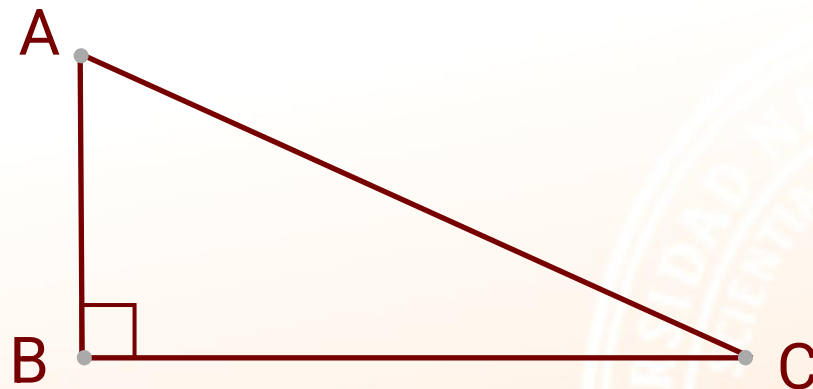
$$a \neq c$$

$$b \neq c$$

# SEGÚN LOS ÁNGULOS

## 1. Triángulo rectángulo

Tiene un ángulo recto.



ABC es un triángulo rectángulo, recto en B

$\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ : Catetos

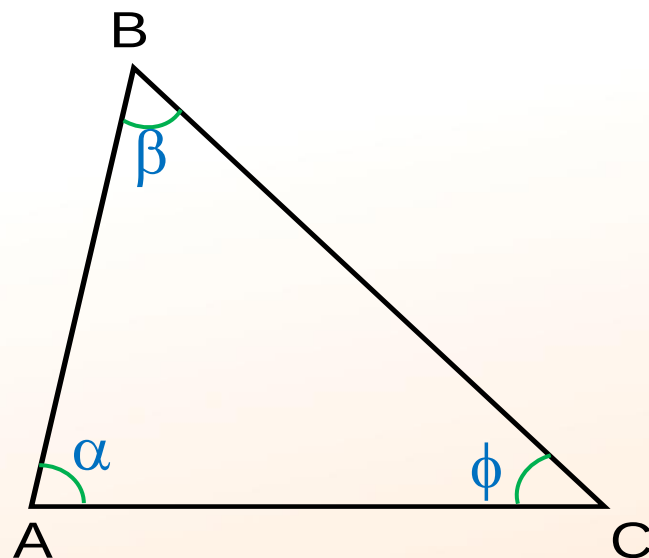
$\overline{AC}$ : Hipotenusa

Teorema de Pitágoras:  $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

## 2. Triángulos oblicuángulos. No tienen ángulo recto, pueden ser:

### Triángulo acutángulo

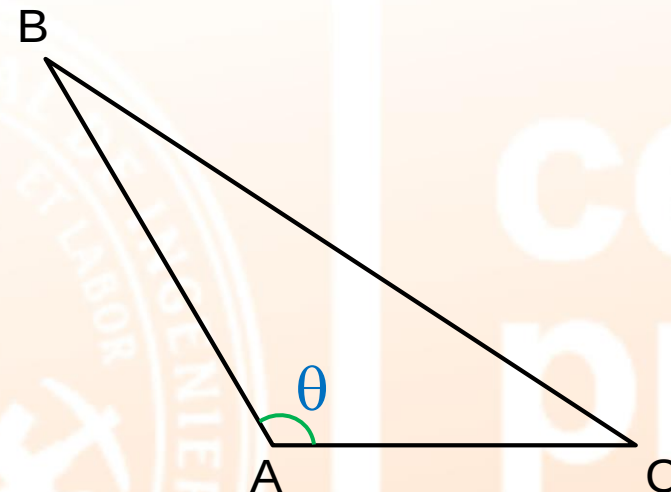
Los tres ángulos son agudos.



El  $\triangle ABC$  es acutángulo:  
 $\alpha, \beta$  y  $\phi < 90$

### Triángulo obtusángulo

Tiene un ángulo obtuso.



El  $\triangle ABC$ , es obtusángulo,  
obtusos en A:  $\theta > 90$

## EJERCICIO 02

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. Un triángulo es equilátero, si los tres lados son congruentes.
- II. Un triángulo isósceles, tiene solo dos lados congruentes.
- III. Un triángulo escaleno, tiene tres lados no congruentes.

A) FFF  
D) VVV

B) FFV  
E) VVF

C) FVV

## RESOLUCIÓN 02

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. Un triángulo es equilátero, si los tres lados son congruentes.
- II. Un triángulo isósceles, tiene solo dos lados congruentes.
- III. Un triángulo escaleno, tiene tres lados no congruentes.

I. **VERDADERO**  
por definición

II. **VERDADERO**  
por definición

III. **VERDADERO**  
por definición

Clave: D



ce  
pre  
UNI

**TEORÍA**

**Geometría**

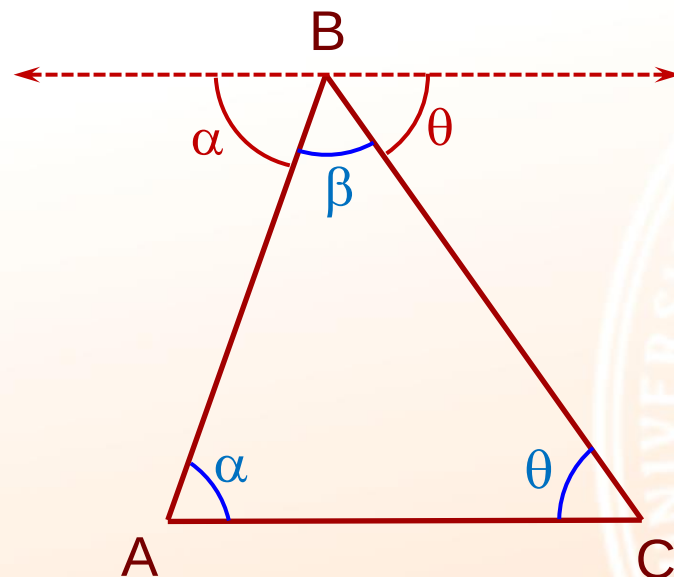
**TEOREMAS EN EL  
TRIÁNGULO**

**CICLO  
PRE  
2024-1**



# TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO

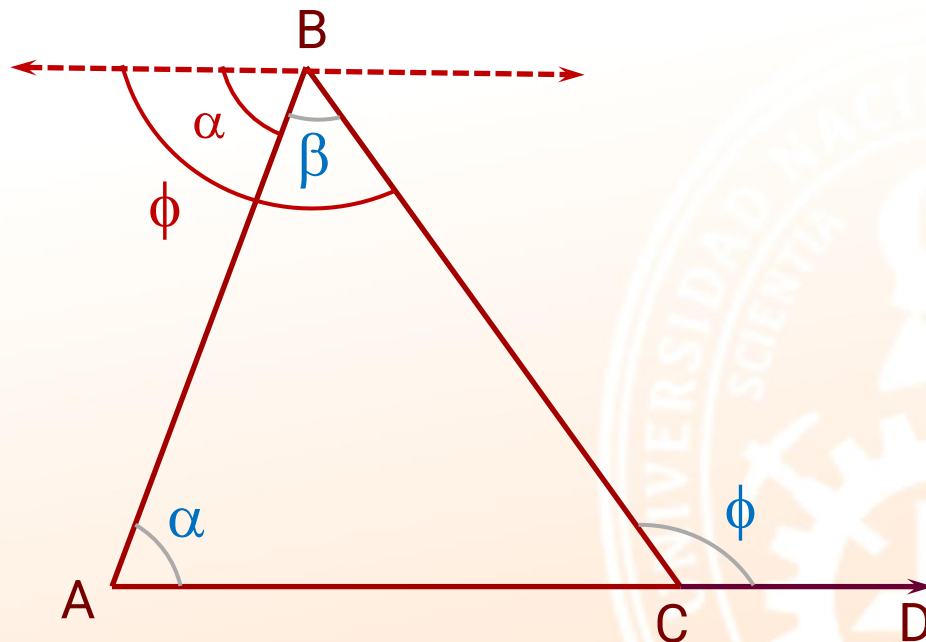
**Teorema.** La suma de medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180.



En el  $\triangle ABC$

$$\alpha + \beta + \theta = 180$$

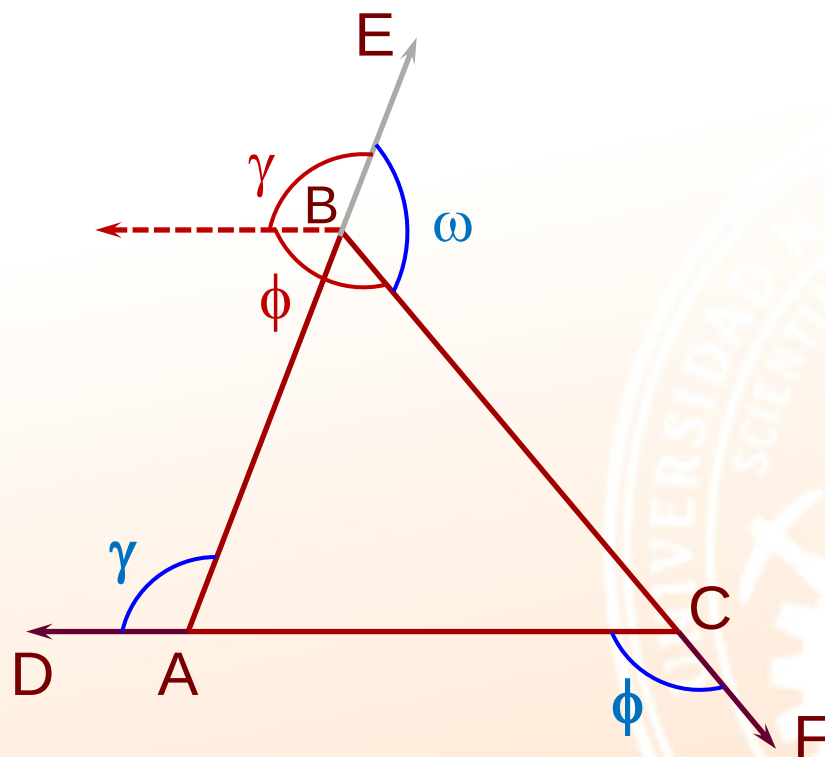
**Teorema.** En un triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de medidas de los ángulos interiores no adyacentes con él.



En el  $\triangle ABC$

$$\phi = \alpha + \beta$$

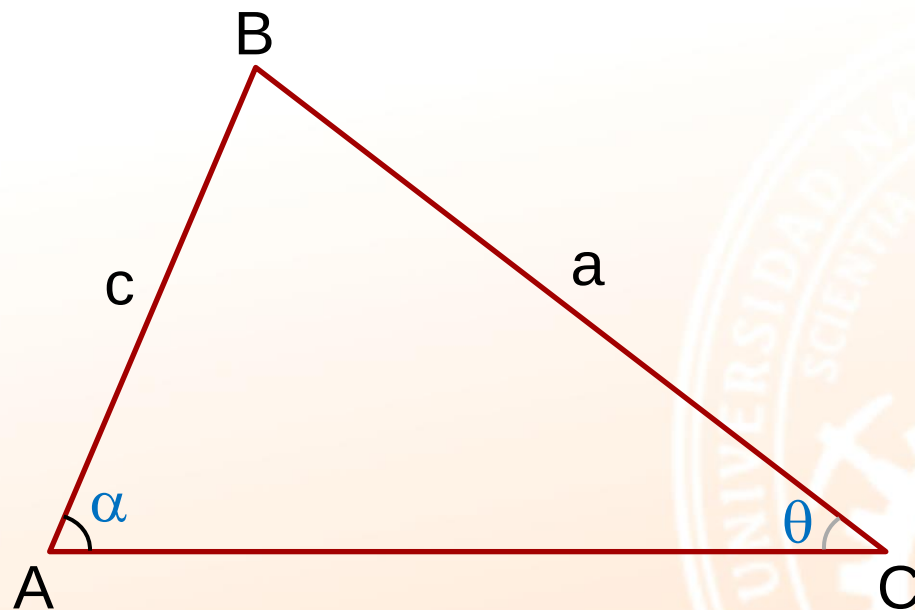
**Teorema.** En un triángulo, la suma de las medidas de los ángulos exteriores, uno por vértice, es 360.



En el  $\triangle ABC$

$$\gamma + \omega + \phi = 360$$

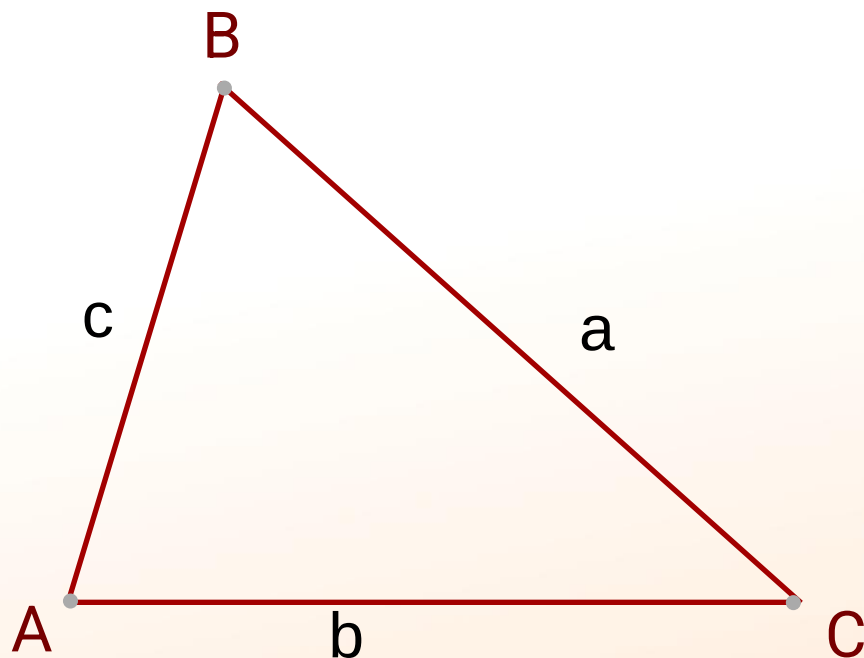
**Teorema.** En un triángulo, al mayor lado, se opone mayor ángulo y recíprocamente.



En el  $\triangle ABC$

$$a > c \Leftrightarrow \alpha > \theta$$

**Teorema.** En un triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.



En el  $\triangle ABC$

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

La longitud de un lado es mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos.

**Demostración:**

En el  $\triangle ABC$ : sea  $c < b$

$$\text{Si } a < b + c \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$b < a + c \quad \dots\dots\dots(2)$$

en 2 se resta  $c$  ambos miembros

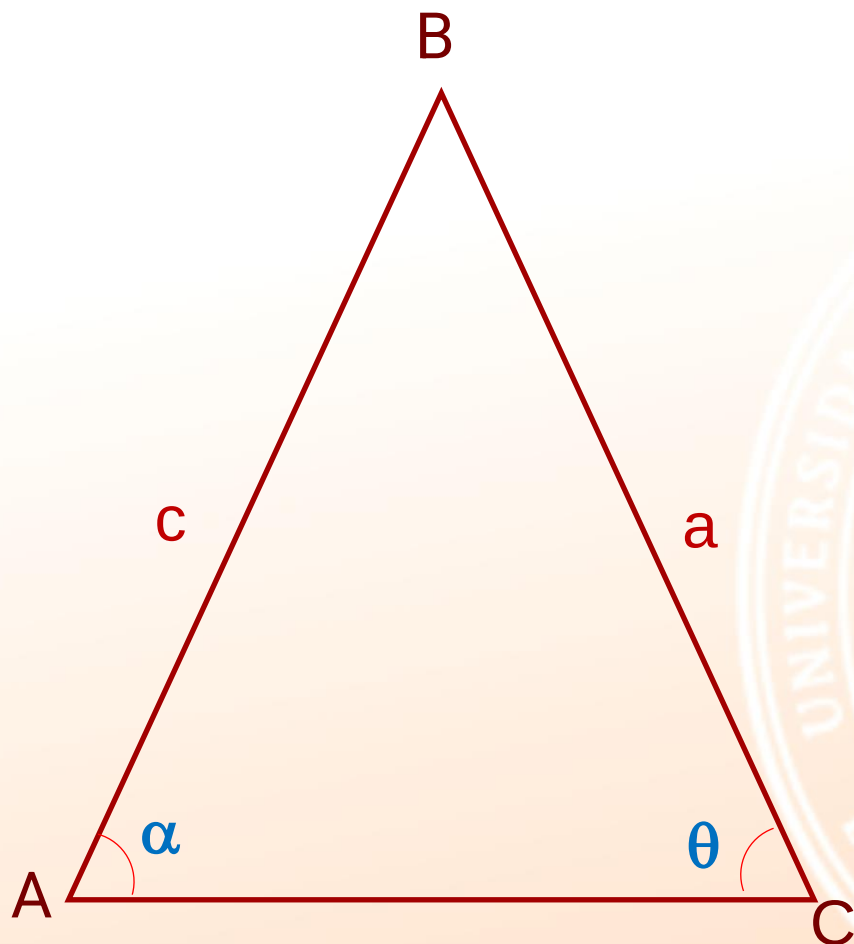
$$b - c < a + c - c$$

$$b - c < a \quad \dots\dots\dots(3)$$

Entonces de (1) y (3)

$$b - c < a < b + c$$

**Teorema.** En un triángulo isósceles, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y recíprocamente.



En el  $\triangle ABC$

$$a = c \Leftrightarrow \alpha = \theta$$

## Problema 01

En un triángulo, las longitudes de los lados menores suman 20 u. Calcule, en u, la suma de los valores pares de la longitud del mayor lado.

A) 46

B) 50

C) 52

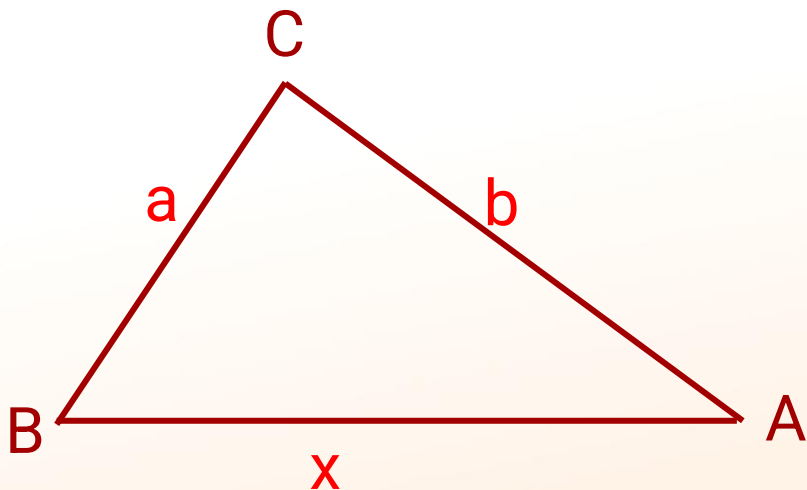
D) 58

E) 60

ce  
pre  
UNI

# Resolución 01

En un triángulo, las longitudes de los lados menores suman 20 u. Calcule, en u, la suma de los valores pares de la longitud del mayor lado.



i) Dato:  $a + b = 20$

ii) Dato:  $a < x$

$$b < x$$

Sumando:  $a + b < 2x$

Luego:  $20 < 2x \rightarrow 10 < x \dots (1)$

Teorema:  $x < a + b \rightarrow x < 20 \dots (2)$

De (1) y (2):  $10 < x < 20$

Enteros pares:

$$12 + 14 + 16 + 18 = 60$$

Clave: A

## Problema 02

En un triángulo  $ABC$ , se traza la ceviana  $\overline{AF}$ , de modo que el triángulo  $ABF$  sea acutángulo. Si  $AF = 8$  u y  $FC = 6$  u, entonces la suma de los valores enteros (en u) de  $AC$  es

A) 26

B) 30

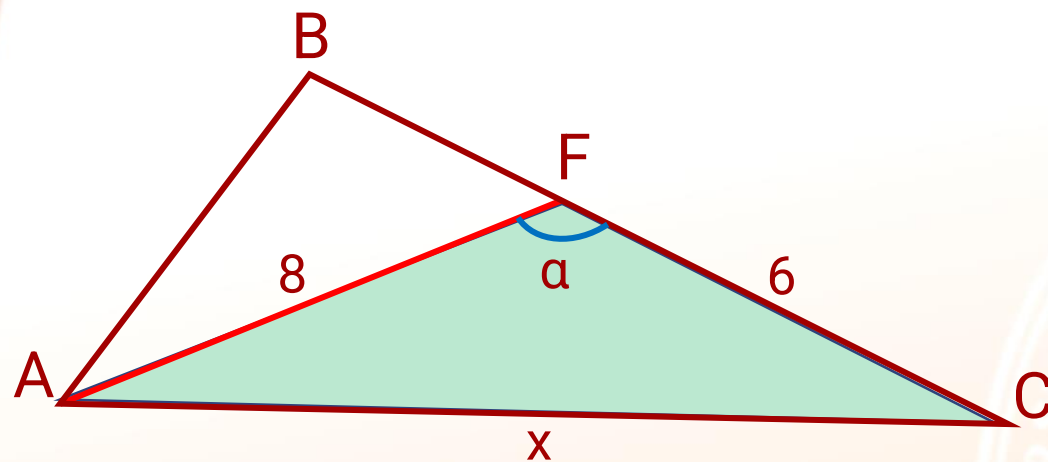
C) 36

D) 45

E) 50

## Resolución 02

En un triángulo ABC, se traza la ceviana  $\overline{AF}$ , de modo que el triángulo ABF sea acutángulo. Si  $AF = 8$  u y  $FC = 6$  u, entonces la suma de los valores enteros, en u, de AC es



En el  $\triangle AFC$ , teorema:

i) Si  $\alpha > 90^\circ \Rightarrow x^2 > 6^2 + 8^2$

$$x > 10 \quad \dots (1)$$

ii) Si  $x < 6 + 8 \Rightarrow x < 14 \dots (2)$

De (1) y (2), los enteros:  $10 < x < 14$

Luego:  $x \in \{11; 12; 13\}$

Suma de valores = 36 u

Clave: A

## Problema 03

Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón 6 u. El mínimo valor entero del perímetro, en u, es

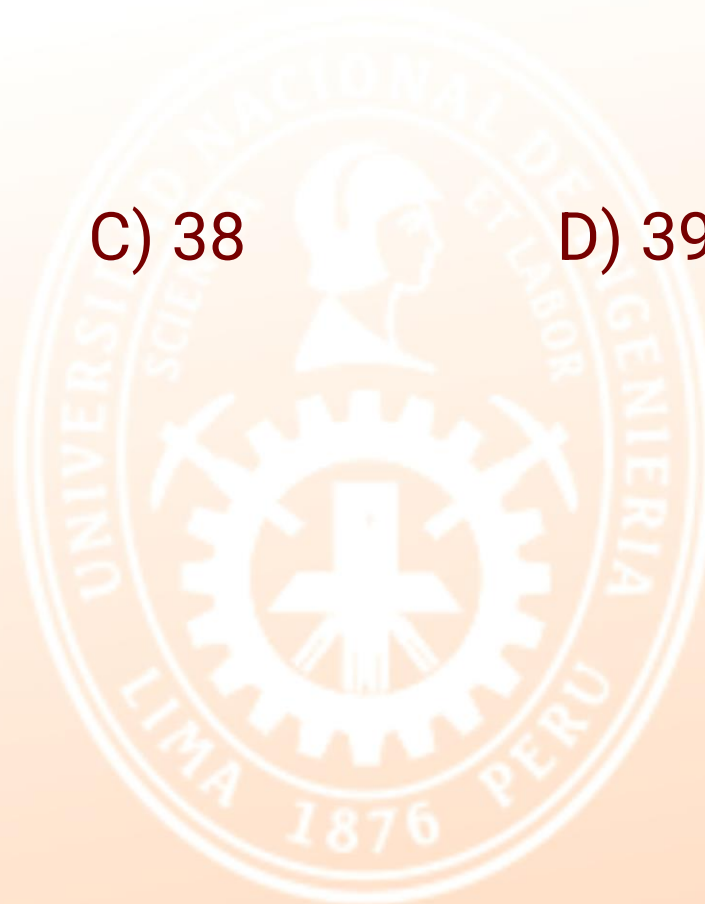
A) 36

B) 37

C) 38

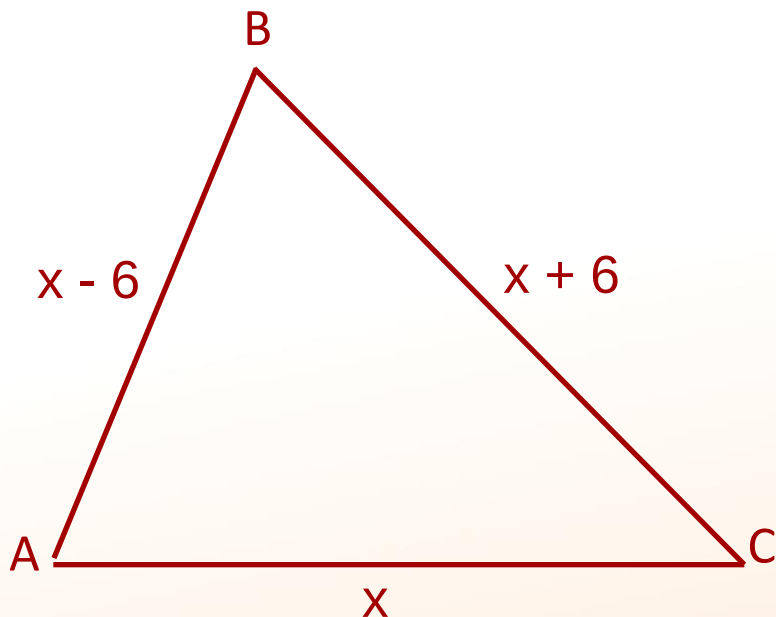
D) 39

E) 40



## Resolución 03

Las longitudes de los lados de un triángulo, están en progresión aritmética de razón 6 u. El mínimo valor entero del perímetro, en u, es



Longitudes de lados, en progresión aritmética, de razón 6 u, pueden ser:

El perímetro, es:  $p = (x - 6) + x + (x + 6)$

$$p = 3x \quad \dots (1)$$

Teorema:  $x > (x + 6) - (x - 6)$

$$x > x + 6 - x + 6$$

$$x > 12$$

$$3x > 36$$

$$P > 36$$

$$P_{\min} = 37$$

Clave: B



ce  
pre  
UNI

**TEORÍA**

# Geometría

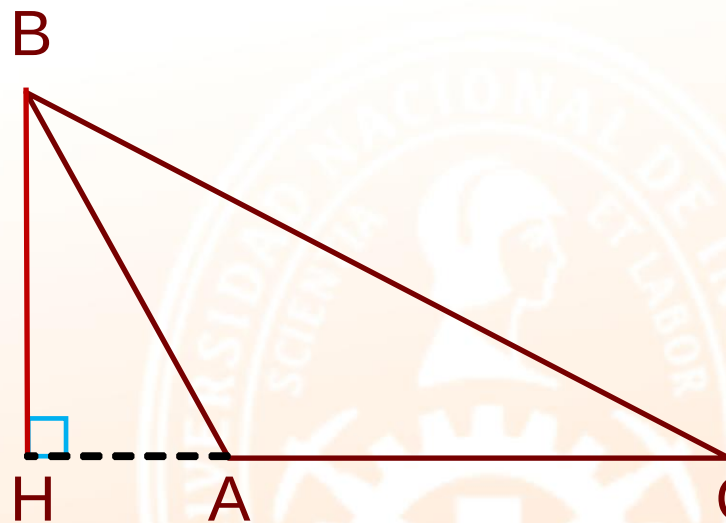
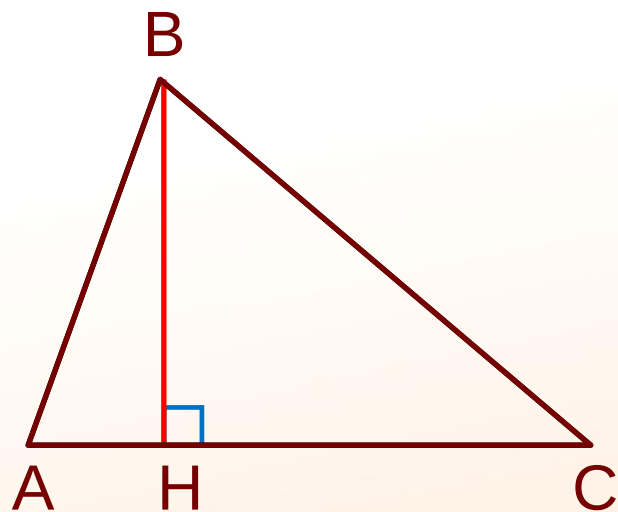
## LÍNEAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

**CICLO  
PRE  
2024-1**

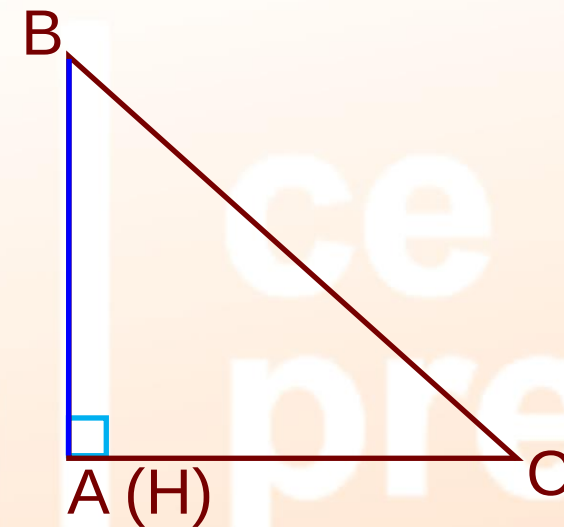


# ALTURA

**Definición.-** Es el segmento perpendicular a un lado del triángulo, trazado desde el vértice opuesto, hasta la recta que contiene a dicho lado.

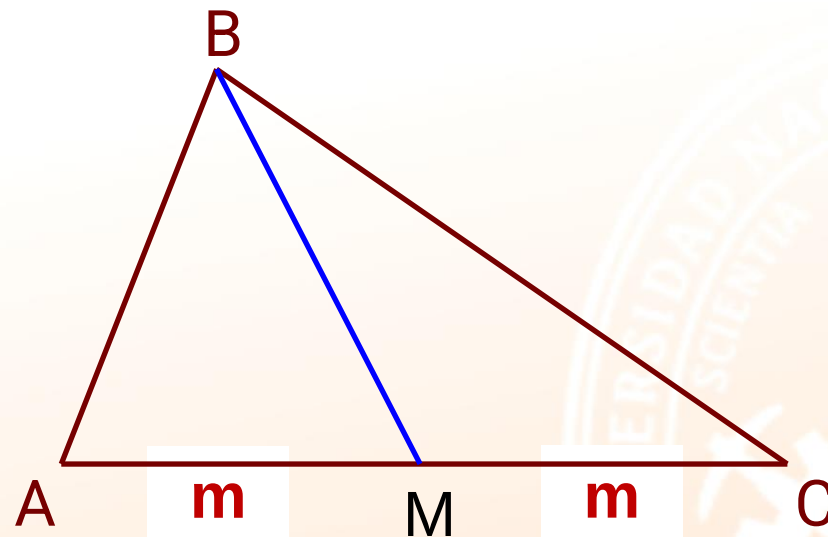


$\overline{BH}$  es altura del  $\triangle ABC$



# MEDIANA

**Definición.-** Es el segmento que tiene por extremos, un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

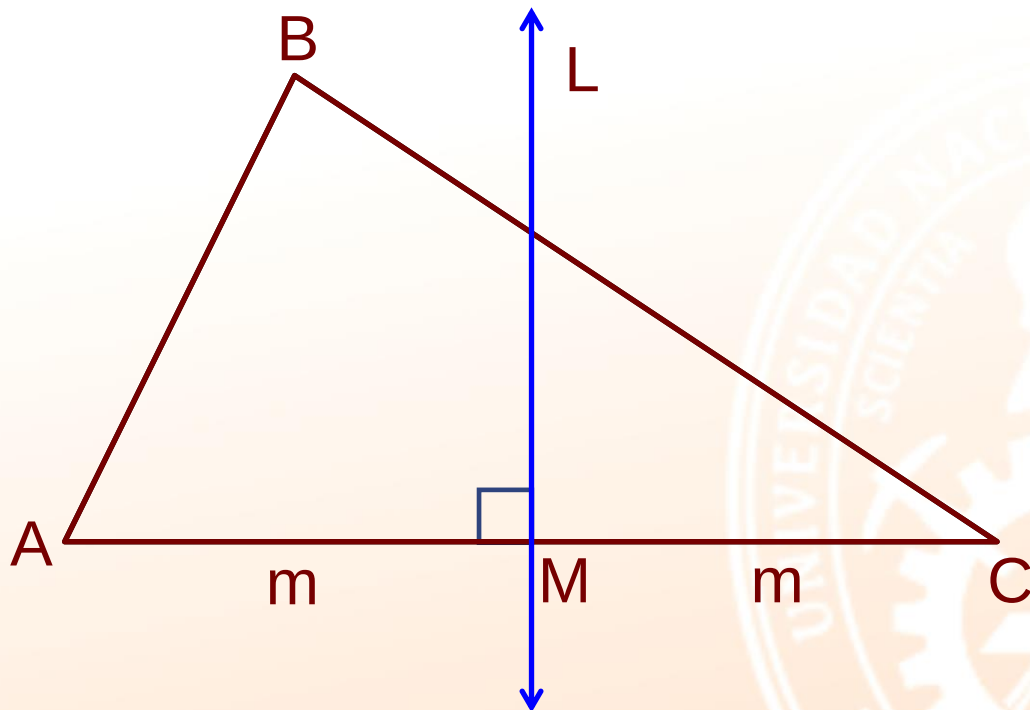


En el  $\triangle ABC$

$\overline{BM}$  es mediana

# MEDIATRIZ

**Definición.-** Es la recta perpendicular a un lado del triángulo, en el punto medio.

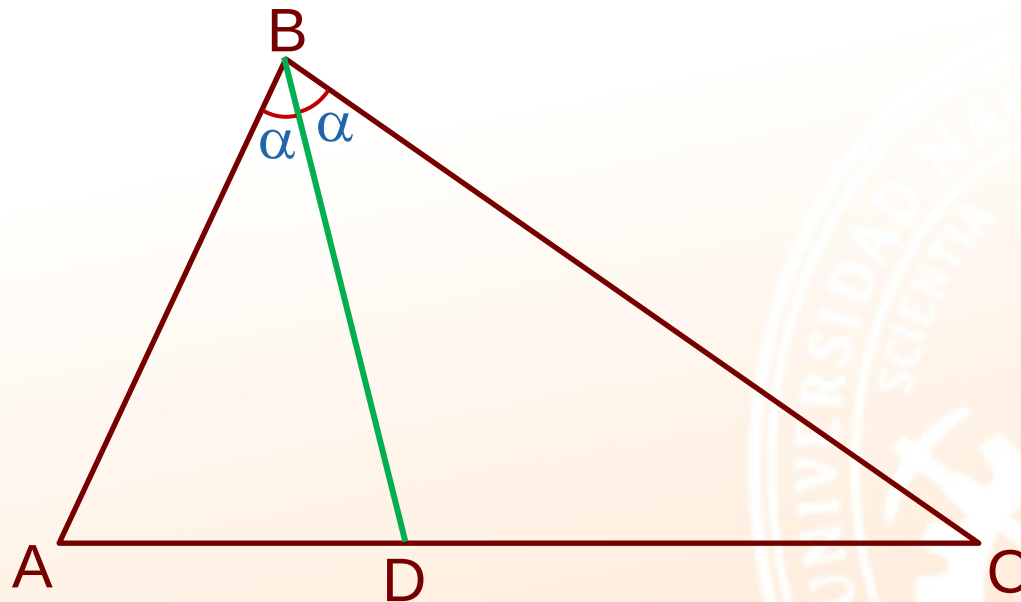


En el  $\triangle ABC$

L es mediatriz del lado  $\overline{AC}$

# BISECTRIZ INTERIOR

**Definición.-** Es el segmento de bisectriz de un ángulo interior del triángulo, cuyos extremos son el vértice del ángulo y un punto del lado opuesto.

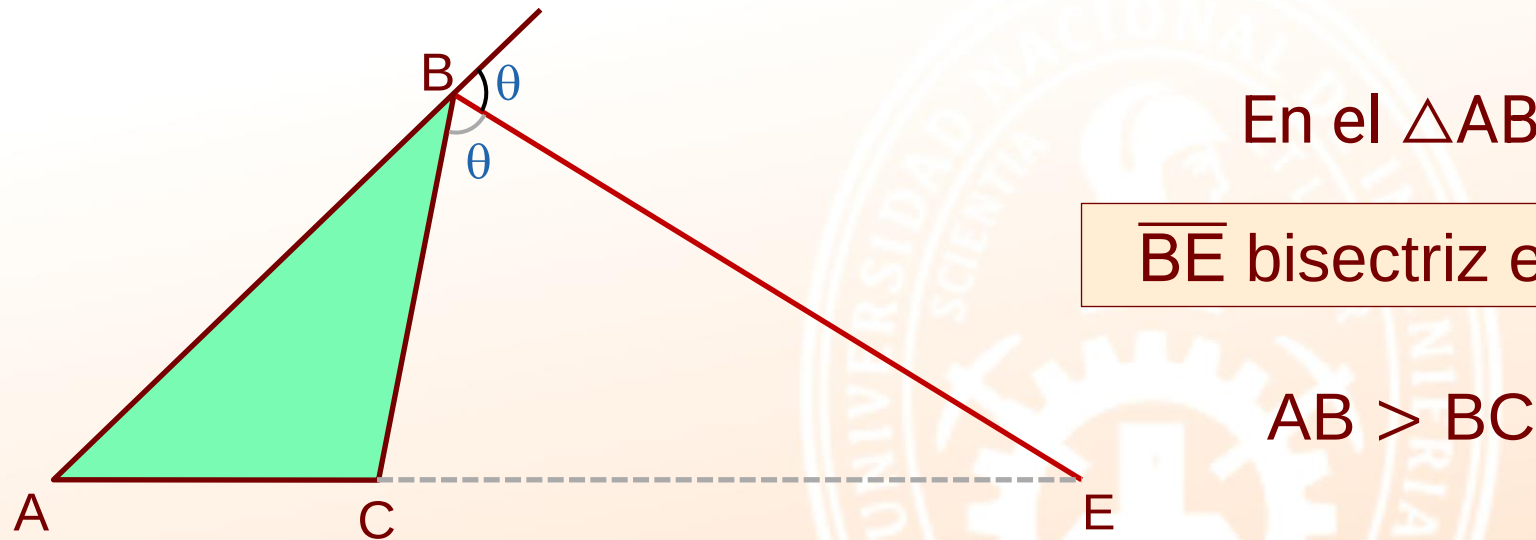


En el  $\triangle ABC$

$\overline{BD}$  es bisectriz interior

# BISECTRIZ EXTERIOR

**Definición.-** Es el segmento de bisectriz de un ángulo exterior del triángulo, cuyos extremos son el vértice de dicho ángulo y el punto de intersección con la recta que contiene al lado opuesto.



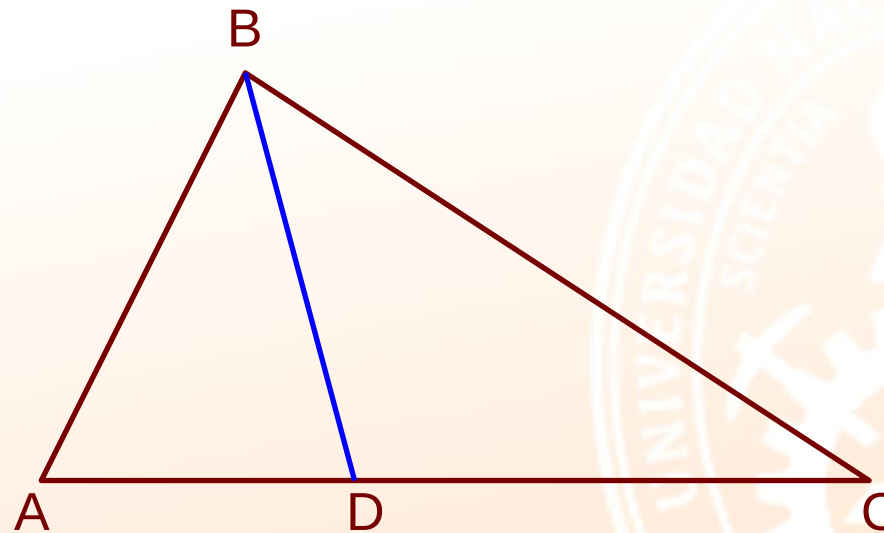
En el  $\triangle ABC$

$\overline{BE}$  bisectriz exterior

$AB > BC$

## OBS:

En un triángulo, se denomina ceviana al segmento cuyos extremos son, un vértice y un punto cualquiera de lado opuesto, diferente a los vértices.

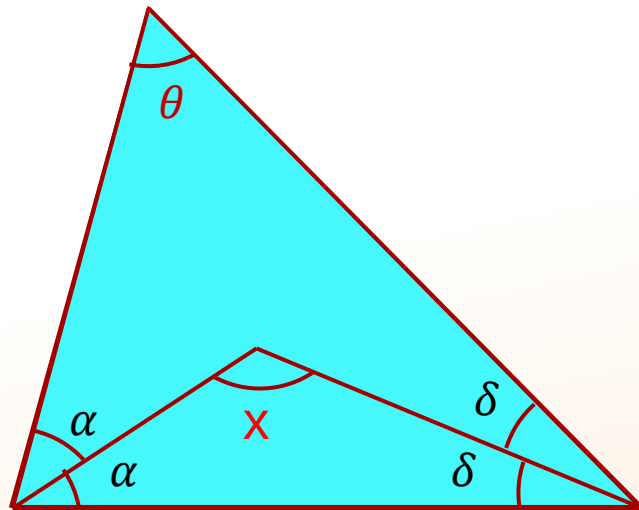


En el  $\triangle ABC$

$\overline{BD}$  es ceviana

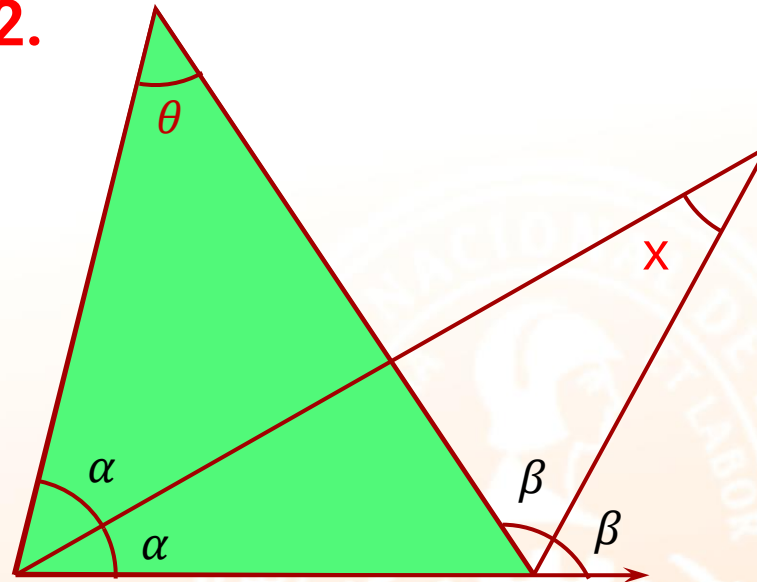
# TEOREMAS

1.



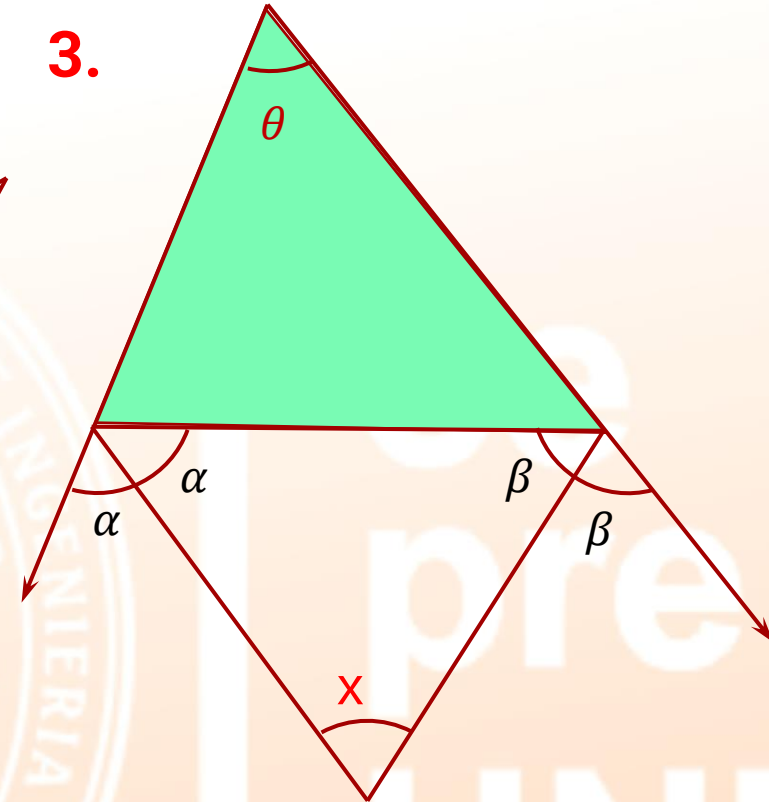
$$x = 90 + \frac{\theta}{2}$$

2.



$$x = \frac{\theta}{2}$$

3.



$$x = 90 - \frac{\theta}{2}$$

## BIBLIOGRAFÍA

1. **MOISE E.** Elementary geometry from an advanced standpoint. 1ra edición. Addison- Wesley, Deleware. USA. 1963.
2. **VEGA VILLANUEVA Flavio.** Matemática. 16ava edición. Colegio militar Leoncio Prado. 1961.
3. **MÁXIMO DE LA CRUZ SOLORZANO.** Matemática moderna 4, 1961
4. **MICHEL HELFGOTT,** Geometría Plana, Ministerio de Cultura



ce  
pre  
UNI

Geometría

**GRACIAS**

ce  
pre  
UNI